Chapitre 5
Logarithme népérien

I. Fonction réciproque

1) Définition

Définition :

Soit I et J des intervalles de $\mathbb{R}$.

Si f : I $\rightarrow$ J est une fonction **continue** et **strictement monotone** sur I, et d'image J, alors, pour tout réel $a \in$ J, il existe un unique réel $b \in$ I tel que $f(b) = a$.

La fonction g : J $\rightarrow$ I qui, au réel a associe le réel b est appelée la **fonction réciproque** de f.

Pour tous $a \in$ J et $b \in$ I, on a :

$$a = f(b) \Leftrightarrow b = g(a)$$

La fonction réciproque de f est notée f^{-1}.

Exemple :

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x^2$.

f est continue est strictement monotone sur $[0;+\infty[$ et, à valeurs dans $[0;+\infty[$ car $f(x) = x^2 \geqslant 0$ pour tout réel x.

Pour tout $y \geqslant 0$, l'équation $x^2 = y$ admet une solution unique : $x=\sqrt{y}$.

La fonction définie sur $[0;+\infty[$: $x=\sqrt{y}$ est la fonction réciproque de la fonction carrée.

C'est la fonction racine carrée.

Propriété :

Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle I et, à valeurs dans un intervalle J, de fonction réciproque f^{-1}.

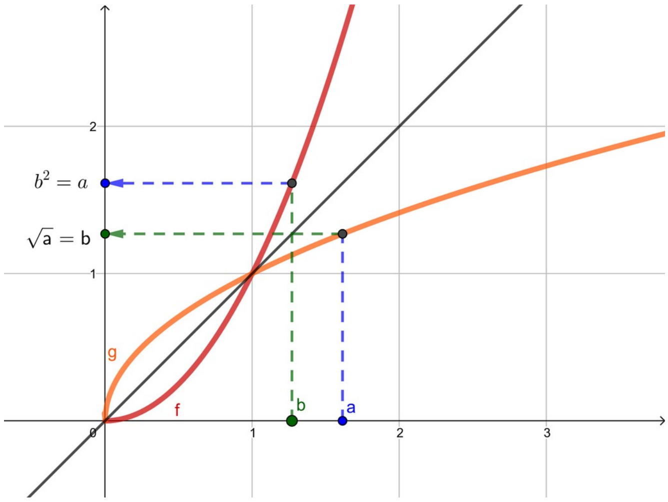
Pour tout réel x appartenant à J, on a $f(f^{-1}(x))=x$ et, pour tout réel x appartenant à I, on a $f^{-1}(f(x))=x$

2) Interprétation graphique

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives de ces deux fonctions sont symétriques par rapport à la droite Δ, d'équation $y=x$.

Exemple :

On considère les fonctions f et g définies sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x^2$ et $g(x)=\sqrt{x}$.



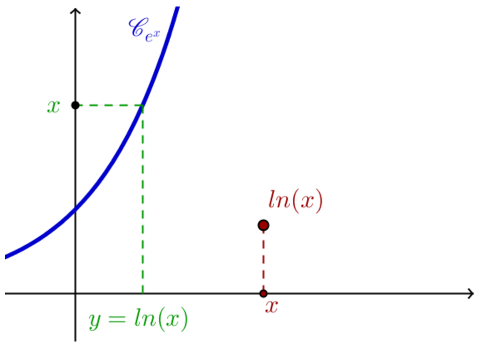
Les fonctions f et g sont réciproques l'une de l'autre.

II. La fonction logarithme népérien

1) Liens avec la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, donc d'après la généralisation du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout nombre réel x de $]0;+\infty[$, il existe un unique nombre réel y tel que $e^y = x$.



Définition :

La fonction **logarithme népérien**, notée $\ln$, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ qui à tout nombre réel $x>0$, associe l'unique solution de l'équation $e^y = x$ d'inconnue y.

On note $y = \ln x$.

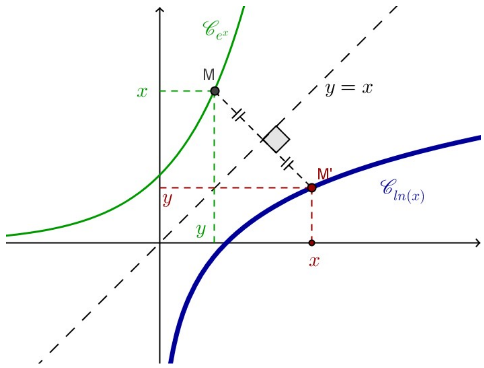
Conséquences :

Elles découlent directement de la définition précédente.

- Pour tout nombre réel $x>0$ et tout nombre réel y, $x = e^y$ équivaut à $y = \ln x$.
- Pour tout nombre réel $x>0$, $e^{\ln x} = x$.
- Pour tout nombre réel x, $\ln(e^x) = x$.
- $\ln 1 = 0$ (car $e^0 = 1$) ; $\ln e = 1$ (car $e^1 = e$) ; $\ln \frac{1}{e} = -1$ (car $e^{-1} = \frac{1}{e}$)

<u>Propriété :</u>

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.



<u>Démonstration :</u>

On note respectivement $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les courbes représentatives des fonctions $\exp$ et $\ln$.

Pour tous nombres réels x et $y>0$, dire que $M'(x;y)$ appartient à $\mathscr{C}'$ équivaut à $y=\ln x$ c'est-à-dire $x=e^y$ ce qui équivaut à dire que $M(y;x)$ appartient à $\mathscr{C}$.

$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont donc symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.

<u>Remarque :</u>

Les fonctions $\exp$ et $\ln$ sont **réciproques** l'une de l'autre.

2) <u>Sens de variation de la fonction ln</u>

<u>Propriété :</u>

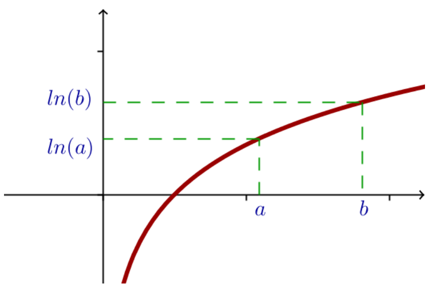
La fonction logarithme népérien est **strictement croissante** sur $]0;+\infty[$.

<u>Démonstration :</u>

a et b sont deux nombres réels tels que $0<a<b$, c'est-à-dire tels que $e^{\ln a}<e^{\ln b}$.

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc :

$$\ln a<\ln b$$



<u>Conséquences :</u>

Pour tous nombres réels $a>0$ et $b>0$.

- $\ln a=\ln b$ équivaut à $a=b$
- $\ln a<\ln b$ équivaut à $a<b$
- $\ln a>0$ équivaut à $a>1$ et $\ln a<0$ équivaut à $0<a<1$.

III. Propriétés algébriques

1) Relation fonctionnelle

Propriété :

Pour tous nombres réels $a>0$ et $b>0$,

$$\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$$

Remarques :

- On dit que la fonction $\ln$ transforme les produits en somme.
- Pour tous nombres strictement positifs a_1, a_2, …, a_n :
  $\ln(a_1\times a_2\times\ldots\times a_n)=\ln(a_1)+\ln(a_2)+\ldots+\ln(a_n)$

2) Logarithme d'un inverse, d'un quotient

Propriétés :

Pour tous nombres réels $a>0$ et $b>0$.

- $\ln\frac{1}{b}=-\ln b$
- $\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$

3) Logarithme d'une puissance, d'une racine carrée

Propriété :

Pour tout nombre réel $a>0$ et pour tout nombre entier relatif n :

$$\ln(a^n)=n\ln a$$

Exemple :

Pour tout nombre réel $x>0$, $\ln(x^2)=2\ln x$.

Propriété :

Pour tout nombre réel $a>0$:

$$\ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}\ln a$$

Exemple :

$\ln\sqrt{2}-\frac{1}{3}\ln 4=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{3}\ln(2^2)=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{2}{3}\ln 2=-\frac{1}{6}\ln 2$.

IV. Étude de la fonction ln

1) Dérivabilité et continuité de ln

Propriétés :

La fonction $\ln$ est **dérivable** sur $]0;+\infty[$ et pour tout nombre réel $x>0$.

$$\ln'(x)=\frac{1}{x}$$

Propriété :

La fonction $\ln$ est **continue** sur $]0;+\infty[$.

En effet, toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

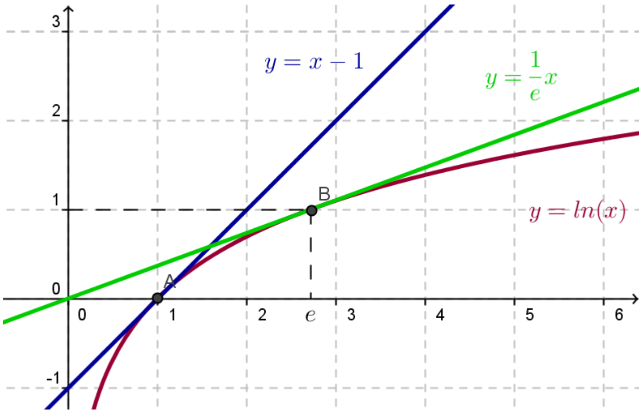
2) Limite de ln en 0 et en +∞

Propriétés :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} \ln x=-\infty$

3) Tableau de variation et courbe

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$\ln'$	$+$
$\ln$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$



L'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe représentative de $\ln$.

V. Compléments sur la fonction ln

1) Limites

Propriété :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

Remarque :

On en déduit que pour h proche de 0 : $\ln(1+h)\approx h$.

Croissances comparées

Propriétés :

- $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$
- $\lim_{x\to0} x\ln x=0$

Généralisation :

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

- $\lim_{x\to0} x^n\ln x=0$
- $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0$

2) Fonction $x\mapsto \ln(u(x))$

Notation :

u désigne une fonction strictement positive sur un intervalle I.

La fonction $x\mapsto\ \ln(u(x))$ définie sur I est notée $\ln u$.

$x\mapsto\ u(x)\ \mapsto\ \ln(u(x))$

Propriété :

u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

La fonction $\ln u$ est **dérivable** sur I et $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$.

Propriété :

Les fonctions u et $\ln u$ ont le même sens de variation sur I.

Exemple :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln(x^2+1)$.

$f=\ln u$ où u est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=x^2+1$.

Or, u est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x, $f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$.